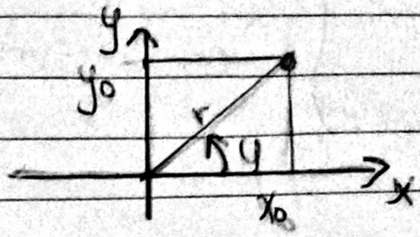
02/05/2017

Μάθημα 13ο
Αναλ 4

Πολικές Συντεταγμένες $\boxed{\mathbb{R}^2}$



$$\bar{g}_\pi : (0,\infty)\times(0,2\pi) =: A_\pi \to \mathbb{R}^2$$

$$\bar{g}_\pi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det D_{\bar{g}_\pi}(r,\varphi) = r$$

Η $\bar{g}_\pi : A_\pi \to g(A_\pi) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ είναι 1-1 & επί

Ισχύει ο τύπος αλλαγής μεταβλητής:

Για $T = [r_1, r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2] \subset [0,\infty)\times[0,2\pi]$

και $f : \bar{g}_\pi(T) \to \mathbb{R}$ συνεχής ισχύει:

$$\int_{\bar{g}_\pi(T)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες $\boxed{\mathbb{R}^3}$

$$\bar{g}_\kappa : (0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R} =: A_\kappa \to \mathbb{R}^3$$

$$\bar{g}_\kappa : (r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det D_{\bar{g}_\kappa}(r,\varphi,z) = r$$

αι η $\bar{g}_\kappa : A_\kappa \to \bar{g}_\kappa(A_\kappa) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : x \geq 0\}$
1-1 και επί

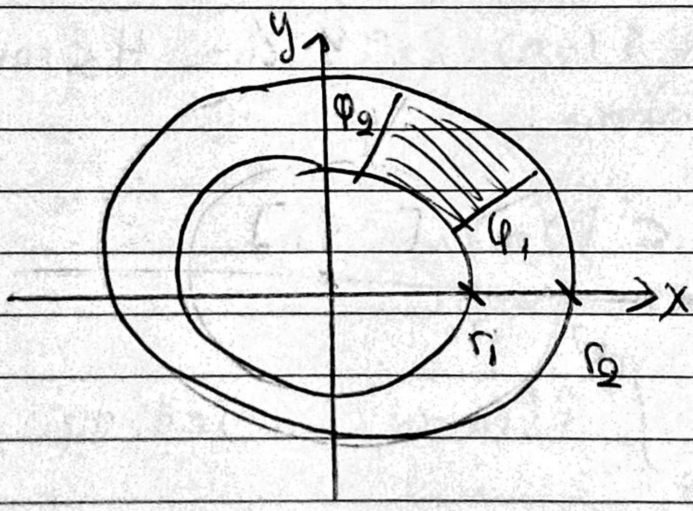
Τύπος αλλαγής μεταβλητής για:

$T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [z_1, z_2] \subset [0,\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$

$$\int_{g_K(T)} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$$

$\tilde{T} = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$

$\tilde{T}_{r_1=0} = [0, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$



Σφαιρικές Συντεταγμένες $\boxed{\mathbb{R}^3}$

$$\bar{g}_\Sigma : \underset{r}{(0,\infty)} \times \underset{\theta}{(0,\pi)} \times \underset{\varphi}{(0,2\pi)} =: A_\Sigma \to \mathbb{R}^3$$

$$\bar{g}_\Sigma(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

πχ. $\vartheta = 0$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vartheta = \pi$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$

Η $\bar{g}_\Sigma : A_\Sigma \to \bar{g}(A_\Sigma)$
$= \mathbb{R}^3 \setminus \{ (x,0,z) : x \geq 0 , z \in \mathbb{R} \}$

είναι 1-1 και επί με :

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \bar{g}_\Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi(x,y) \end{pmatrix}$$

με $\arccos \ (-1,1) \to (0,\pi)$
$\varphi(x,y)$ όπως στις πολικές συντεταγμένες.

Η $\bar{g} : A \to \mathbb{R}^3$ είναι C^1 με

$$D\bar{g}_\Sigma (r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\vartheta} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\vartheta} & \frac{dy}{d\varphi} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\vartheta} & \frac{dz}{d\varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\det D\bar{g}_\Sigma(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta} > 0 \quad \forall (r,\theta,\varphi)\in A_\Sigma$$

$\Longrightarrow$ Για $T \subset A_\Sigma$ Jordan-μετρήσιμα και συμπαγή ισχύει (από το Θ.Α.Μ) ο τύπος αλλαγής μεταβλητής:

$$\int_{\bar{g}_\Sigma(T)} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_T f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\ \underline{\underline{r^2\sin\theta}}\ d(r,\theta,\varphi)$$

Ειδικότερα, αυτός ο τύπος ισχύει ισχύει για
$T = [r_1, r_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times[\varphi_1,\varphi_2] \subset A_\Sigma$
(αλλά λόγω συνέχειας και για $\subset \bar{A}_\Sigma$)

$$\left[A_\Sigma = \underset{r}{(0,\infty)} \times \underset{\theta}{(0,\pi)} \times \underset{\varphi}{(0,2\pi)} \right]$$

π.χ. για $T_{\text{πλήρης}} = [0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$
"ολόκληρη"

έχουμε $\bar{g}_\Sigma(T_{\text{πλήρης}}) = \bar{B}(0,R) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

για $T_{\text{άνω μισή μπάλα}} = [0,R]\times[0,\pi/2]\times[0,2\pi]$
$T_{\text{κάτω μισή μπάλα}} = [0,R]\times[\pi/2,\pi]\times[0,2\pi]$
$T_{\text{μπάλα με } x,y,z\ge 0} = [0,R]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$

$$T_{\text{"κοίλη σφ"}} = [R_1,R_2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

Συνεπώς ο όγκος της μπάλας $B = \bar{B}(0,R)$:
$$V(B) = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 1\, r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = 2\pi \frac{R^3}{3} \overbrace{\left(-\cos\theta \Big|_{\theta=0}^{\pi}\right)}^{= -(-1)-(-1)=2} = 4\pi \frac{R^3}{3}$$

Άσκηση 144: Θεωρώντας τα ολοκληρώματα της $e^{-(x^2+y^2)}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ πάνω από τα $[-R,R]\times[-R,R]$ και $\bar{B}((0,0),R)$, $R>0$ δείξτε ότι:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Λύση:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(R) = \int_{\bar{B}((0,0),R)} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) =$

είναι πάνω σε κυκλικό δίσκο

πολ. συντ. $\int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^R e^{-\overbrace{r^2}^{=s}}\, r\,dr =$

$$= 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{R^2} e^{-s}\,ds = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(R) \leq g(R) = \int_{[-R,R]\times[-R,R]} \overbrace{e^{-(x^2+y^2)}}^{= e^{-x^2} e^{-y^2}}\, d(x,y) =$$

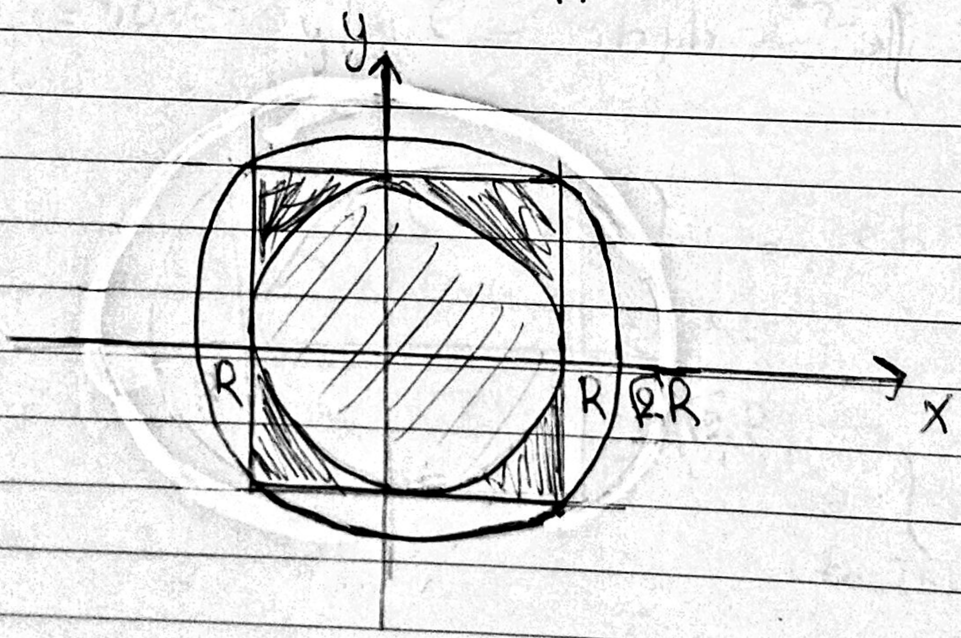
$$\left(= f(R) + \underbrace{\int_{[-R,R]\times[-R,R] \setminus B((0,0),R)} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)}_{\geq 0} \right)$$

$$= \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dy\,dx =$$

$$= \left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right) = \left(\underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx}_{=\,2\int_{0}^{R} e^{-x^2}\,dx}\right)^2$$

$$\boxed{= 4\left(\int_{0}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \xrightarrow[R\to+\infty]{} \pi}$$

$$\underbrace{f(R)}_{\substack{\downarrow R\to\infty \\ \pi}} \leq \underbrace{g(R)} \leq \underbrace{f(\sqrt{2}R)}_{\substack{\downarrow \\ \pi}}$$



Άσκηση 135 : Υπολογίστε το εμβαδό ελλειπτικού δίσκου
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a,b>0)$

Λύση

$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = (x')^2 + (y')^2$

Τότε : $E = \{ (x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x')^2 + (y')^2 \leq 1 \}$
$=: \Delta = \{ (r,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi] \}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xleftarrow{g_1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xleftarrow{g_2} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax' \\ by' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$=$

$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xleftarrow{g} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, r\cos\varphi \\ b\, r\sin\varphi \end{pmatrix}$

"γενικευμένες πολικές συντεταγμένες"

Σύμφωνα με τον ΚΑΜ :

$$V(E) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 \cdot |\det Dg(r,\varphi)| \, d\varphi \, dr$$

όπου η $g = g_1 \circ g_2$ πιο πάνω

όπου, επίσης, $Dg(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det D_g(r,\varphi) = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr > 0 \ \forall r > 0$

$\Longrightarrow \quad V(E) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr \, d\varphi \, dr = 2\pi ab \frac{1}{2} = \pi ab$

λόγω συνέχειας
ισχύει ο τύπος αλλαγής μεταβλητής
και στο $[0,1] \times [0,2\pi]$

Άσκηση 136 : Υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, $a,b,c > 0$

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Big(\underbrace{\frac{x}{a}}_{x'}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{y}{b}}_{y'}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{z}{c}}_{z'}\Big)^2 \leq 1 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xleftarrow[g_1]{} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \xleftarrow[g_2]{} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax' \\ by' \\ cz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

με $\det Dg_1(x', y', z') = |A| = abc$

$$V(M) = \int_A 1 \, d(x,y,z) = \int_{g_1^{-1}(M)=B} 1 \, \overbrace{|\det Dg_1(x',y')|}^{=abc} d(x',y') =$$

$$= abc \underbrace{\int_B 1 \cdot d(x',y',z')}_{=V(B)=4\pi/3} \Rightarrow \boxed{V(M) = abc\,\frac{4\pi}{3}}$$

όπου $B = g_1^{-1}(M) = \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \leq 1 \}$

Άσκηση 137:

Έστω $B \subset \mathbb{R}^3$ το άνω μέρος της μπάλας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R>0$. Υπολογίστε:

$$\int_B \underbrace{z}_{=f(x,y,z)} \, d(x,y,z)$$

Λύση

$$I = \int_B \underbrace{z}_{=f(x,y,z)} \, d(x,y,z) \overset{\text{σφαιρ. συντ.}}{=} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} f\overbrace{\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}}^{=r\cos\theta} r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi \underbrace{\left(\int_0^R r^3\, dr\right)}_{=\frac{R^4}{4}} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\, d\theta}_{=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \underbrace{2\cos\theta\sin\theta}_{=\sin(2\theta)}\, d\theta} =$$

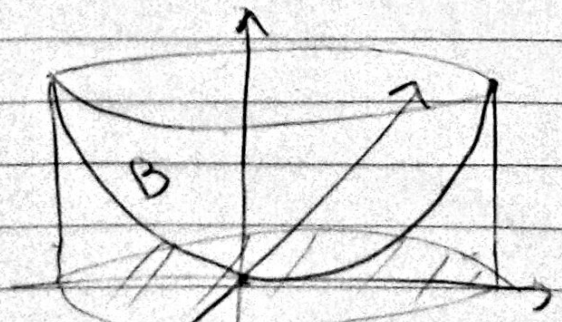
$$\Rightarrow I = \frac{\pi R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin(\overbrace{2\theta}^{=s})\, d\theta = \frac{\pi R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin s\, ds =$$

$$= \frac{\pi R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \overbrace{\left(-\cos s \Big|_{s=0}^{\pi}\right)}^{=2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Ασκηση 141:

$B \subset \mathbb{R}^3$: Το σώμα που περικλείεται από το ελλ. παραβ. $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 1$.

Υπολογίστε το $J = \int_B \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z)$



$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{\Leftrightarrow (x,y) \in D} \quad \wedge \quad x^2+y^2 \leq z \leq 1 \}$$

$$J = \int_D \int_{x^2+y^2}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, d(x,y) \Rightarrow$$

$$J = \int_D \sqrt{x^2+y^2}\,\left(1-(x^2+y^2)\right) d(x,y) \stackrel{\text{πολικές}}{=}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1-r^2)\, r\, dr\, d\varphi \Rightarrow J = 2\pi \int_0^1 r^2(1-r^2)\, dr = \frac{4\pi}{15}$$